

# Kalkulus Integral dan Aplikasinya



Rahma Wahyu, M.Pd  
Candra Pradhana, M.Si

**Kalkulus Integral dan Aplikasinya**  
**Penulis :**  
**Rahma Wahyu, Candra Pradhana**

**ISBN : 978-623-6713-19-8**

**Editor: Tika Septia**  
**Penata Letak: Tim Zahra Publisher Group**  
**Desain Sampul: Tim Zahra Publisher Group**

Copyright © Zahra, 2020,  
Cetakan Pertama, Oktober 2020

Diterbitkan oleh  
**CV. Zahra Publisher Group**  
Jl. Lesanpuro II No. 554a  
Kota Malang, Jawa Timur  
Email: zahra.publisher@gmail.com

Dicetak dan Didistribusikan oleh  
**CV. Zahra Publisher Group**

Barangsiapa dengan sengaja atau tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal 2 ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).  
Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

## **DAFTAR ISI**

<b>KATA PENGANTAR .....</b>	i
<b>DAFTAR ISI .....</b>	ii
<b>BAB 1. ANTI TURUNAN.....</b>	1
1.1. Integral .....	1
1.2. Pengantar untuk Persamaan Differensial .....	13
1.3. Notasi Jumlah dan Sigma .....	19
1.4. Pendahuluan Luas .....	30
1.5. Integral Tentu .....	41
1.6. Teorema Dasar Kalkulus .....	51
1.7. Sifat-Sifat Integral Tentu Lebih Lanjut .....	56
1.8. Bantuan dalam Perhitungan Intgral Tentu .....	60
<b>BAB 2. PENGGUNAAN INTEGRAL.....</b>	66
2.1. Luas Daerah Bidang Rata .....	66
2.2. Volume Benda Pejal .....	79
2.3. Volume Benda Putar: Kulit Tabung .....	90
<b>BAB 3.FUNGSI TRANSENDEN .....</b>	97
3.1. Fungsi Logaritma Asli .....	97
3.2. Diferensiasi Logaritmik dan Integral yang Menghasilkan Fungsi Logaritma Asli .....	103
3.3. Fungsi Balikan (Invers) dan Turunannya .....	107

3.4. Fungsi Eksponensial Natural (Asli) .....	113
3.5. Fungsi Logaritma dan Eksponensial Umum	117
3.6. Fungsi Invers Trigonometri dan Turunannya .	124
3.7. Fungsi Hiperbolik dan Turunannya .....	132
<b>BAB 4. TEKNIK PENGINTEGRALAN.....</b>	<b>144</b>
4.1. Pengintegralan dengan Substitusi .....	144
4.2. Beberapa Integral Trigonometri .....	153
4.3. Substitusi yang Merasionalkan .....	162
4.4. Pengintegralan Parsial .....	171
4.5. Pengintegralan Fungsi Rasional .....	179
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>iv</b>
<b>PROFIL PENULIS.....</b>	<b>v</b>

# BAB I

## ANTI TURUNAN (INTEGRAL TAK TENTU)

### 1.1. INTEGRAL

Tahukah anda bahwa matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan? Contohnya penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian , demikian pula pemangkatan dan penarikan akar.

#### Definisi Anti Turunan (Integral Tak Tentu)

Pada Kalkulus 1 sebelumnya, kita telah mempelajari pendiferensialan (turunan), balikannya disebut anti pendiferensialan (anti turunan).

#### Definisi Turunan

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan n bilangan bulat positif, maka turunan fungsi f ( $f'$  dibaca f aksen) yaitu  $f'(x^n) = nx^{n-1}$ , yakni  $D_x(x^n) = nx^{n-1}$ .

Dengan bantuan definisi turunan di atas, anda dapat mendefinisikan anti turunan melalui contoh di bawah ini :

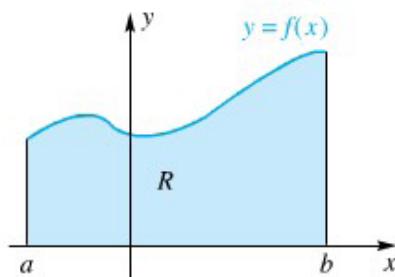
## BAB II

# PENGGUNAAN INTEGRAL

### 2.1. LUAS DAERAH BIDANG RATA

#### Kasus 1 : Daerah di atas sumbu-x

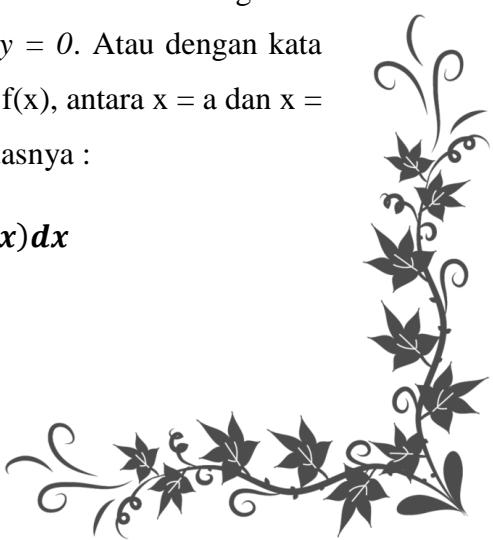
Misalkan  $y = f(x)$  adalah sebuah persamaan di atas sumbu-x dan  $f$  kontinu dan tak negatif pada selang  $a \leq x \leq b$  (perhatikan gambar 1).



Gambar 1. Kurva di atas sumbu x

Perhatikan bahwa daerah  $R$  dibatasi oleh grafik-grafik  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  dan  $y = 0$ . Atau dengan kata lain daerah  $R$  berada di bawah  $y = f(x)$ , antara  $x = a$  dan  $x = b$ . Sehingga dapat didefinisikan Luasnya :

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx$$



## **BAB III**

### **FUNGSI TRANSENDE**

#### **3.1. FUNGSI LOGARITMA ASLI**

##### **Definisi 3.1.1**

Fungsi Logaritma Asli, ditulis sebagai  $\ln$ , adalah fungsi yang didefinisikan oleh :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$$

Daerah asal fungsi logaritma asli adalah himpunan semua bilangan positif. Dibaca  $\ln x$  sebagai “logaritma asli dari  $x$ ”.

Fungsi logaritma asli diferensiabel karena dengan menerapkan teorema dasar pertama kalkulus diperoleh :

$$D_x(\ln x) = D_x \left( \int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x}$$

Dari hasil ini dan aturan rantai, kita peroleh teorema berikut:

## BAB IV

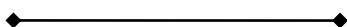
### TEKNIK PENGINTEGRALAN

#### 4.1. PENGINTEGRALAN DENGAN SUBSTITUSI

Suatu fungsi yang mempunyai bentuk baku dapat langsung diperoleh hasil pengintegralannya. Jika tidak, maka dapat dilakukan substitusi terhadap fungsi tersebut yang akan mengubahnya menjadi suatu bentuk baku.

Daftar beberapa integral fungsi bentuk baku:

1.  $\int k \, du = ku + C$
2.  $\int [f(u) + g(u)] \, du = \int f(u)du + \int g(u) \, du$
3.  $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ; n \neq -1$
4.  $\int \frac{du}{u} = \int u^{-1}du = \ln|u| + C$
5.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad ; a > 0 \text{ dan } a \neq 1$
6.  $\int e^u \, du = e^u + C$
7.  $\int \sin u \, du = -\cos u + C$
8.  $\int \cos u \, du = \sin u + C$
9.  $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
10.  $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$



## **DAFTAR PUSTAKA**

Purcell Edwin J. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2.*

Jakarta: Erlangga

Spiegel Murray R. 1999. *Teori dan Soal-soal Analisis Vektor.* Jakarta: Erlangga

Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale, 1999, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Terjemahan: I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh, Jilid I, Edisi Kedelapan, Cetakan Kesepuluh, Jakarta: Erlangga.

Leithold, 1991, *Kalkulus dan Ilmu ukur Analitik*, Terjemahan: Hutahean, Jilid 1, Edisi Kelima, Jakarta: Erlangga

# Tentang Penulis



Rahma Wahyu, lahir di Malang, 30 Maret 1990. Dosen Prodi Teknik Informatika Universitas Islam Raden Rahmat (UNIRA) Malang, dengan bidang ilmu Matematika pada Prodi Teknik Informatika terutama Kalkulus, Matematika Diskrit, Aljabar Linier, Statistika dan Probabilitas, serta Metodologi Penelitian, Memperoleh gelar Sarjana Pendidikan (S.Pd) pada Pendidikan Matematika tahun 2012 di Universitas Muhammadiyah Malang. Gelar Magister Pendidikan (M.Pd) dalam bidang pendidikan Matematika di Pascasarjana Universitas Muhammadiyah Malang pada tahun 2015. Mahasiswa aktif pada Program Doktor Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang (UM) tahun 2017-sekarang. Sejak tahun 2019-sekarang diangkat menjadi Kepala Unira Career Center (UCC) di Universitas Islam Raden Rahmat Malang



Candra Pradhana, M.Si lahir di Malang 22 Mei 1989, Menamatkan S1 jurusan Fisika di UM Tahun lulus 2013 dan S2 Jurusan Fisika di UI lulus tahun 2017. Dari Tahun 2017-sekarang aktif sebagai dosen Teknik Elektro di Universitas Islam Raden Rahmat dan aktif mengajar dan meneliti pada bidang Fisika Dasar, Mikroprosesor, Teknik Digital

Buku ini merupakan buku Kalkulus untuk mahasiswa. Kalkulus merupakan salah satu mata kuliah wajib. Bahkan, saat ini Kalkulus menjadi mata kuliah wajib untuk mahasiswa pada Fakultas Sains dan Teknologi. Secara garis besar buku ini terdiri dari 4 bab, meliputi.

1. Anti Turunan (Integral Tak Tentu).
2. Penggunaan Integral.
3. Fungsi Transenden.
4. Teknik Pengintegralan.



**ZAHRA**  
PUBLISHER  
ANGGOTA IKAPI